5章　補章

§4　4章の補足（p.154～p.166）

問1

問1で頻出する式変形として，2つの公式を記す．
導出の過程は省略する．
※対数の性質より導出可能．

i）$e^{\log t} = t$

ii）$e^{-\log t} = e^{-t} = \dfrac{1}{e^t}$

（1）　$p(t) = \sin t$，$q(t) = 2te^{\cos t}$として，
公式を用いると

$$\int p(t)dt = \int \sin t\,dt = -\cos t$$

$$\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt = \int 2te^{\cos t}e^{-\cos t}dt$$

$$= \int 2tdt = t^2$$

したがって，求める一般解は

$\boldsymbol{x = (t^2 + C)e^{\cos t}}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（2）$p(t) = \dfrac{1}{t}$，$q(t) = t$として，公式を用いると

$$\int p(t)dt = \int \frac{1}{t}dt = \log t$$ 　※$t > 0$と仮定できる．

$$\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt = \int te^{\log t}dt$$

$$= \int t \cdot t\,dt$$

$$= \int t^2dt = \frac{1}{3}t^3$$

したがって，求める一般解は

$$x = \left(\frac{1}{3}t^3 + C\right)e^{-\log t}$$

$$= \left(\frac{1}{3}t^3 + C\right)t^{-1}$$

$\boldsymbol{= \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{C}{t}}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（3）　$p(t) = -1$，$q(t) = e^{3t}$として，公式を用いると

$$\int p(t)dt = \int (-1)dt = -t$$

$$\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt = \int e^{3t}e^{-t}dt$$

$$= \int e^{2t}dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}$$

したがって，求める一般解は

$$x = \left(\frac{1}{2}e^{2t} + C\right)e^t$$

$\boldsymbol{= \dfrac{1}{2}e^{3t} + Ce^t}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（4）$p(t) = -\tan t$，$q(t) = \cos t$として，公式を用いると

$$\int p(t)dt = \int (-\tan t)dt$$

$$= \int \frac{-\sin t}{\cos t}dt$$

$$= \log(\cos t)$$ 　※$\cos t > 0$と仮定できる．

$$\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt = \int \cos t\, e^{\log(\cos t)}dt$$

$$= \int \cos t \cos t\,dt$$

$$= \int \cos^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{1 + \cos 2t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\cdot 2\sin t\cos t$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t$$

したがって，求める一般解は

$$x = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C\right)e^{-\log(\cos t)}$$

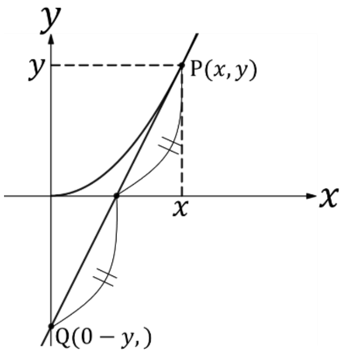
$$= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C\right)(\cos t)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C\right)\frac{1}{\cos t}$$

$$= \boldsymbol{\frac{t}{2\cos t} + \frac{\sin t}{2} + \frac{C}{\cos t}}$$ **（Cは任意定数）**

問２

図示すると，下の図のようになる．



図より，Q(0, $-y$)となることがわかるから，

直線PQの傾きは

$$\frac{y-(-y)}{x-0} = \frac{2y}{x}$$

これが，曲線$y=f(x)$上の点Pにおける接線の傾きに等しいから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

これは変数分離形の１階微分方程式である．

両辺をyで割って，xについて積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = 2\int \frac{1}{x}dx$$

これより

$\log|y| = 2\log|x| + c$（cは任意定数）

$\log|y| - \log|x|^2 = c$

$$\log\left|\frac{y}{x^2}\right| = c$$

$$\frac{y}{x^2} = \pm e^c$$

$C = \pm e^c$とおくと，一般解は

$y = Cx^2$（Cは任意定数）

点(1，1)を通ることにより，$C=1$

よって，求める方程式は，$\boldsymbol{y = x^2}$

問３

問題文より

$$\frac{dy}{dx} = x + y \cdot\cdot\cdot ①$$

これは, 1 階線形微分方程式である.

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

斉次の場合の一般解を求めると

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

両辺をxについて積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = \int dx$$

これより

$\log|y| = x + c$（cは任意定数）

$y = \pm e^{x+c}$

$y = \pm e^c e^x$

$C = \pm e^c$とおくと，一般解は

$y = Ce^x$（Cは任意定数）

$y = ue^x$とし，両辺をxで微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}e^x + ue^x$$

これを，①に代入すると

$$\frac{du}{dx}e^x + ue^x = x + ue^x$$

$$\frac{du}{dx}e^x = x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{e^x}$$

$$\frac{du}{dx} = xe^{-x}$$

両辺をxで積分すると

$$\int du = \int xe^{-x}\,dx$$

ここで，右辺は部分積分法を用いて

$$\int xe^{-x}\,dx = x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$（Cは任意定数）

よって

$y = ue^x$

$= (-xe^{-x} - e^{-x} + C)e^x$

$= -x - 1 + Ce^x$

求める方程式は原点を通るから，

$0 = 0 - 1 + Ce^0$

$C = 1$

よって，求める方程式は

$\boldsymbol{y = -x - 1 + e^x}$

問４

（１）特性方程式$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$を解くと

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$より，$\lambda = 1$，$2$

よって，斉次の場合の一般解は

$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の右辺$4e^t$は斉次微分方程式の解だから，微分方程式の１つの解を，$x = Ate^t$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = Ae^t + Ate^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ae^t + Ae^t + Ate^t$$

$$= Ate^t + 2Ae^t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$Ate^t + 2Ae^t - 3(Ae^t + Ate^t) + 2Ate^t = 4e^t$

$Ate^t + 2Ae^t - 3Ae^t - 3Ate^t + 2Ate^t = 4e^t$

$-Ae^t = 4e^t$

よって，$-A = 4$より，$A = -4$

したがって，１つの解は

$x = -4te^t$

以上より，求める一般解は

$\boldsymbol{x = -4te^t + C_1 e^t + C_2 e^{2t}}$**（**$\boldsymbol{C_1}$**，**$\boldsymbol{C_2}$**は任意定数）**

（２）特性方程式$\lambda^2 + 9 = 0$を解くと

$\lambda = -9$より，$\lambda = \pm 3i$

よって，斉次の場合の一般解は

$x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$（$C_1$，$C_2$は任意定数）

与えられた微分方程式の右辺$\cos 3t$は斉次微分方程式の解だから，微分方程式の１つの解を，$x = t(A\cos 3t + B\sin 3t)$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = A\cos 3t + B\sin 3t + t(-3A\sin 3t + 3B\cos 3t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3A\sin 3t + 3B\cos 3t + (-3A\sin 3t + 3B\cos 3t) + t(-9A\cos 3t - 9B\sin 3t)$$

$$= -6A\sin 3t + 6B\cos 3t + t + t(-9A\cos 3t - 9B\sin 3t)$$

これを微分方程式に代入すると

$-6A\sin 3t + 6B\cos 3t + t + t(-9A\cos 3t - 9B\sin 3t) + 9t(A\cos 3t + B\sin 3t) = \cos 3t$

$-6A\sin 3t + 6B\cos 3t = \cos 3t$

よって

$$\begin{cases} -6A = 0 \\ 6B = 1 \end{cases}$$

これを解くと，$A = 0$，$B = \dfrac{1}{6}$

したがって，1 つの解は

$$x = \frac{1}{6}t\sin 3t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{6}t\sin 3t + C_1\cos 3t + C_2\sin 3t}$$

（$\boldsymbol{C_1}$**，**$\boldsymbol{C_2}$**は任意定数）**

問５

特性方程式$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$を解くと

$(\lambda - 2)^2 = 0$より，$\lambda = 2$（２重解）

よって，斉次の場合の一般解は

$x = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の右辺e^{2t}は斉次微分方程式の解であり，また，te^tも含んでいるため，

微分方程式の１つの解を，$x = At^2e^{2t}$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = 2Ate^{2t} + 2At^2e^{2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t} + 4Ate^{2t} + 4At^2e^{2t}$$

$$= 2Ae^{2t} + 8Ate^{2t} + 4At^2e^{2t}$$

これを与えられた微分方程式に代入すると

$2Ae^{2t} + 8Ate^{2t} + 4At^2e^{2t} - 4(2Ate^{2t} + 2At^2e^{2t}) + 4At^2e^{2t} = e^{2t}$

$2Ae^{2t} + 8Ate^{2t} + 4At^2e^{2t} - 8Ate^{2t} - 8At^2e^{2t} + 4At^2e^{2t} = e^{2t}$

$2Ae^{2t} = e^{2t}$

よって，$2A=1$ より，$A=\dfrac{1}{2}$

したがって, 1 つの解は

$$x=\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

以上より，求める一般解

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}t^2e^{2t}+(C_1+C_2t)e^{2t}}\ \textbf{（}\boldsymbol{C_1,\ C_2}\textbf{は任意定数）}$$

問 6

（１）両辺をt^2で割ると

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{3}{t}\frac{dx}{dt}+\frac{4}{t^2}x=0$$

$x=t^\alpha$の形の解があると予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\alpha t^{\alpha-1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

これを与えられた微分方程式に代入すると

$$t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}-3t\alpha t^{\alpha-1}+4t^\alpha=0$$

$$\alpha(\alpha-1)t^\alpha-3\alpha t^\alpha+4t^\alpha=0$$

$$\{\alpha(\alpha-1)-3\alpha+4\}t^\alpha=0$$

$$(\alpha^2-4\alpha+4)t^\alpha=0$$

$$(\alpha-2)^2t^\alpha=0$$

よって，$\alpha=2$

よって，$x=t^2$は解であり

$x=Ct^2$も解である．（Cは任意定数）

線形独立である 2 つの解を見つけるために，

Cをtの関数$u=C(t)$とおくと

$$x=ut^2$$

両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}t^2+2ut$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2u}{dt^2}t^2+2\frac{du}{dt}t+2\frac{du}{dt}t+2u$$

$$=\frac{d^2u}{dt^2}t^2+4\frac{du}{dt}t+2u$$

これを与えられた微分方程式に代入すると

$$t^2\left(\frac{d^2u}{dt^2}t^2+4\frac{du}{dt}t+2u\right)-3t\left(\frac{du}{dt}t^2+2ut\right)+4ut^2=0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}t^4+4\frac{du}{dt}t^3+2ut^2-3\frac{du}{dt}t^3-6ut^2+4ut^2=0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}t^4+\frac{du}{dt}t^3=0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}t+\frac{du}{dt}=0$$

左辺を変形すると

$$\frac{d^2u}{dt^2}t+\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right)\cdot t+\frac{du}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}t\right)$$

したがって

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}t\right)=0$$

$$\frac{du}{dt}t=C_1\text{（}C_1\text{は任意定数）}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{C_1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$u=C_1\log|t|+C_2$（C_1，C_2は任意定数）

したがって

$x=t^2(C_1\log|t|+C_2)$は解であり，

また，関数$t^2\log|t|$とt^2は線形独立である．

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=t^2(C_1\log|t|+C_2)}\ \textbf{（}\boldsymbol{C_1,\ C_2}\textbf{は任意定数）}$$

（２）両辺をt^2で割ると

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{3}{t}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{t^2}x=0$$

$x=t^\alpha$の形の解があると予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\alpha t^{\alpha-1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

これを与えられた微分方程式に代入すると

$$t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}+3t\alpha t^{\alpha-1}+t^\alpha=0$$

$$\alpha(\alpha-1)t^\alpha+3\alpha t^\alpha+t^\alpha=0$$

$$\{\alpha(\alpha-1)+3\alpha+1\}t^\alpha=0$$

$$(\alpha^2+2\alpha+1)t^\alpha=0$$

$$(\alpha+1)^2t^\alpha=0$$

よって，$\alpha=-1$

よって，$x=t^{-1}$は解であり

$x=Ct^{-1}$も解である．（Cは任意定数）

線形独立である 2 つの解を見つけるために，

Cをtの関数$u=C(t)$とおくと

$$x=ut^{-1}$$

両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}t^{-1}+u\cdot(-t^{-2})$$

$$=\frac{du}{dt}t^{-1}-ut^{-2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2u}{dt^2}t^{-1}+\frac{du}{dt}(-t^{-2})-\left(\frac{du}{dt}t^{-2}-2ut^{-3}\right)$$

$$=\frac{d^2u}{dt^2}t^{-1}-\frac{du}{dt}t^{-2}-\frac{du}{dt}t^{-2}+2ut^{-3}$$

$$=\frac{d^2u}{dt^2}t^{-1}-2\frac{du}{dt}t^{-2}+2ut^{-3}$$

これを与えられた微分方程式に代入すると

$$t^2\left(\frac{d^2u}{dt^2}t^{-1}-2\frac{du}{dt}t^{-2}+2ut^{-3}\right)$$

$$+3t\left(\frac{du}{dt}t^{-1}-ut^{-2}\right)+ut^{-1}=0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}t-2\frac{du}{dt}t^0+2ut^{-1}+3\frac{du}{dt}t^0-3ut^{-1}+ut^{-1}=0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}t+\frac{du}{dt}=0$$

左辺を変形すると

$$\frac{d^2u}{dt^2}t+\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right)\cdot t+\frac{du}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}t\right)$$

したがって

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}t\right)=0$$

$$\frac{du}{dt}t=C_1$$（C_1は任意定数）

$$\frac{du}{dt}=\frac{C_1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$u=C_1\log|t|+C_2$（C_1，C_2は任意定数）

したがって

$x=t^{-1}(C_1\log|t|+C_2)$であり，

また，関数$t^{-1}\log|t|$とt^{-1}は線形独立である．

よって，求める一般解は

$\boldsymbol{x=t^{-1}(C_1\log|t|+C_2)}$**（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）**

問７

（１）$\dfrac{dy}{dx}=p$とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$であるから

$$\frac{dp}{dx}+p^2=0$$

$$\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}=-1$$

両辺をxについて積分すると

$$\int\frac{1}{p^2}dp=-\int dx$$

$$-\frac{1}{p}=-x+c$$（cは任意定数）

$$p=\frac{1}{x+C_1}$$（$-c=C_1$）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+C_1}$$

両辺をxについて積分すると

$$\int dy=\int\frac{1}{x+C_1}dx$$

$\boldsymbol{y=\log|x+C_1|+C_2}$**（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）**

（２）$\dfrac{dy}{dx}=p$とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$であるから

$$\frac{dp}{dx}=\sqrt{1-p^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}=1$$

両辺をxについて積分すると

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}dp=\int dx$$

$\sin^{-1}p=x+C_1$（C_1は任意定数）

$$p=\sin(x+C_1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\sin(x+C_1)$$

両辺をxについて積分すると

$$\int dy=\int\sin(x+C_1)\,dx$$

$\boldsymbol{y=-\cos(x+C_1)+C_2}$**（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）**

問８

$\dfrac{dy}{dx}=p$とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$であるから

$$\frac{dp}{dx}=1+p^2$$

$$\frac{1}{1+p^2}\frac{dp}{dx}=1$$

両辺をxについて積分すると

$$\int \frac{1}{1+p^2}dp = \int dx$$

$\tan^{-1} p = x + C_1$（C_1は任意定数）

$p = \tan(x + C_1)$

$x = 0$のとき，$p = 0$であるから

$0 = \tan(0 + C_1)$，すなわち，$C_1 = 0$

よって，$\dfrac{dy}{dx} = \tan x$

両辺をxについて積分すると

$$\int dy = \int \tan x\, dx$$

$y = -\log|\cos x| + C_2$（C_2は任意定数）

$x = 0$のとき，$y = 1$であるから

$1 = -\log|\cos 0| + C_2$

$1 = -\log 1 + C_2$

$C_2 = 1$

以上より，$\boldsymbol{y = -\log|\cos x| + 1}$

問９

（１）$\dfrac{dy}{dx} = p$とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = p\dfrac{dp}{dy}$であるから

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$$

$$yp\frac{dp}{dy} = -p^2$$

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dy} = -\frac{1}{y}$$

両辺をyについて積分すると

$$\int \frac{1}{p}dp = -\int \frac{1}{y}dy$$

これより

$\log|p| = -\log|y| + c$（cは任意定数）

$\log|p| + \log|y| = c$

$\log|py| = c$

$py = \pm e^c$

$C_1 = \pm e^c$とおくと

$py = C_1$

$$p = \frac{C_1}{y}$$

$p = \dfrac{dy}{dx}$だから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}$$

$$y\frac{dy}{dx} = C_1$$

両辺をxについて積分すると

$$\int y dy = C_1 \int dx$$

$\dfrac{1}{2}y^2 = C_1 x + C_2$（$C_2$は任意定数）

$y^2 = 2C_1 x + 2C_2$

C_1，C_2は任意定数であるから，求める一般解は

$\boldsymbol{y^2 = C_1 x + C_2}$**（**$\boldsymbol{C_1}$**，**$\boldsymbol{C_2}$**は任意定数）**

（２）$\dfrac{dy}{dx} = p$とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = p\dfrac{dp}{dy}$であるから

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2$$

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y}$$

両辺をyについて積分すると

$$\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy$$

これより

$\log|p| = \log|y| + c$（cは任意定数）

$\log|p| - \log|y| = c$

$$\log\left|\frac{p}{y}\right| = c$$

$$\frac{p}{y} = \pm e^c$$

$C_1 = \pm e^c$とおくと

$$\frac{p}{y} = C_1$$

$p = C_1 y$

$p = \dfrac{dy}{dx}$だから

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = C_1$$

両辺をxについて積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = C_1 \int dx$$

これより

$\log|y| = C_1 x + C$

$y = \pm e^{C_1 x + C}$

$= \pm e^{C} e^{C_1 x}$

$C_2 \pm e^{c}$とおくと

$\boldsymbol{y = C_2 e^{C_1 x}}$ **（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）**

問 10

$\dfrac{dy}{dx} = p$とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = p\dfrac{dp}{dy}$であるから

$$p\frac{dp}{dy} = 2yp$$

$$\frac{dp}{dy} = 2y$$

両辺をyについて積分すると

$$\int dp = \int 2y dy$$

これより

$p = y^2 + c$（cは任意定数）

$y^2 = p - c$

$y^2 = p + C_1$　※$-c = C_1$

ここで，$p = \dfrac{dy}{dx}$

$$y^2 = \frac{dy}{dx} + C_1$$

$y = 0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx} = 1$ であるから

$0 = 1 + C_1$

$C_1 = -1$

よって

$$y^2 = \frac{dy}{dx} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$$

$$\frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{dx} = 1$$

両辺をxについて積分すると

$$\int \frac{1}{y^2+1} dy = \int dx$$

これより，$\tan^{-1} y = x + C_2$（C_2は任意定数）

ここで，$x = 0$のとき$y = 0$であるから

$\tan^{-1} 0 = 0 + C_2$

$\tan C_2 = 0$

$C_2 = n\pi$（nは整数）

よって，$\tan^{-1} y = x + n\pi$であるから

$\boldsymbol{y = \tan(x + n\pi) = \tan x}$ **（$\boldsymbol{n}$は整数）**